

Векторлар, олар туралы жалпы түсінік

$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ – кеңістікте берілген нүктелер болсын.

$\overrightarrow{AB} = \{(x_2 - x_1), (y_2 - y_1), (z_2 - z_1)\}$, жалпы түрде $\overrightarrow{AB} = \vec{a}(x, y, z)$

$|\overrightarrow{AB}| = |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – ұзындық. Екі A және B нүктелерінің арасындағы арақашықтық. $d = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – бірлік векторлар; $\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0), \vec{k} = (0, 0, 1)$.

$\vec{i} \in Ox$ абцисса өсінің бойында жатады, $\vec{j} \in Oy$ ордината, $\vec{k} \in Oz$ аппликата өсінің бойында жатады.

Екі вектордың скаляр көбейтіндісі және қасиеттері.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}\vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$1) \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}, \quad 2) (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}), \quad (\mu = \text{const})$$

$$3) \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}, \quad 4) \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}$$

$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}$ – $\vec{b}$ векторының бағыты бойынша түсірілген $\vec{a}$ векторының проекциясы.

5) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$, 6) Егер $\vec{a} = 0$ болса, немесе $\vec{b} = 0$ болса, немесе $\vec{a} \perp \vec{b}$ перпендикуляр болса, онда $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ болады.

Егер $\vec{a}(x_1, y_1, z_1), \vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ берілсе, онда $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$

Ескерту: $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0$.

$\vec{a}(x, y, z)$ векторының $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ векторлары арқылы жіктелімі $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$

№1. $A(-1, 2, 5), B(2, -3, 4)$ – кеңістікте берілген нүктелер.

а) $\overrightarrow{AB} = ?$ б) $|\overrightarrow{AB}| = ?$ в) $\overrightarrow{AB}$ векторының $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ векторлары арқылы жіктелімі-?

Шешуі:

$$\text{а) } \overrightarrow{AB} = \{(x_2 - x_1), (y_2 - y_1), (z_2 - z_1)\} = \{(2 + 1), (-3 - 2), (4 - 5)\} = (3, -5, -1)$$

$$\text{б) } |\overrightarrow{AB}| = |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{9 + 25 + 1} = \sqrt{35}$$

$$\text{в) } \overrightarrow{AB} = 3 \cdot \vec{i} - 5 \cdot \vec{j} - \vec{k}.$$

№2. $\vec{a}(-2, y, 1)$ векторы және оның ұзындығы $|\vec{a}| = 3$ берілген. Табу керек $y = ?$

$$|\vec{a}| = 3 = \sqrt{4 + y^2 + 1} = \sqrt{5 + y^2},$$

$$(3)^2 = (\sqrt{5 + y^2})^2, \quad 9 = 5 + y^2, \quad y^2 = 4, \quad y = \pm 2.$$

№3. $\vec{a}(-1,3,2), \vec{b}(2,4,4)$ векторлары берілген.

Табу керек:

а) $|\vec{b}| = ?$ б) $3\vec{a} - 2\vec{b} = \vec{c} = ?$ в) $\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = ?$ г) $np_{\vec{b}}\vec{a} = ?$

Шешуі:

а) $|\vec{b}| = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6$, б) $3\vec{a} - 2\vec{b} = (-3, 9, 6) - (4, 8, 8) = \vec{c}(-7, 1, -2)$,

в) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}})$, $\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = ?$, $|\vec{a}| = \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{14}$,

$|\vec{b}| = 6$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = -2 + 12 + 8 = 18$, $\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{18}{6 \cdot \sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$

г) $np_{\vec{b}}\vec{a} = ?$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| np_{\vec{b}}\vec{a}$, $np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{18}{6} = 3$.

№4. $\varphi = \widehat{\vec{a}\vec{b}} = \frac{2\pi}{3}$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ берілген. Табу керек:

а) $\vec{a}^2 = ?$, б) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = ?$, в) $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b}) = ?$

Шешуі:

а) $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = 3^2 = 9$;

б) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 9 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 16 = 25 + 2 \cdot 12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 13$;

в) $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b}) = 3\vec{a}^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{a} - 4\vec{b}^2 = 3 \cdot 9 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} - 4 \cdot 16 =$
 $= 27 + 4|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - 64 = 27 + 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 64 = 27 - 24 - 64 = -61$.

№5. α —ның қандай мәнінде $\vec{a} = \alpha \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k}$ және $\vec{b} = \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} - \alpha \cdot \vec{k}$ векторлар өзара перпендикуляр болады? Шешуі: егер $\vec{a} \perp \vec{b}$ болса, онда олардың скаляр көбейтіндісі нөлге тең болады.

$\vec{a}(\alpha, -3, 2), \vec{b}(1, 2, -\alpha); \vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha - 6 - 2\alpha = 0, \alpha = -6$.

№6. Дене $\vec{F}(x_1, y_1, z_1) = \vec{F}(5, 4, 3)$ күшінің әсерімен, $\vec{S}(x_2, y_2, z_2) = \vec{S}(2, 1, -2)$ векторының бастапқы нүктесінен соңғы нүктесіне дейін қозғалыста болған. $\vec{F}$ күшінің жұмысын есептеу керек.

A —жұмысын мына формула арқылы есептейміз

$A = \vec{F} \cdot \vec{S} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 5 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) = 10 + 4 - 6 = 8$.

Үйге тапсырма

1) $A(2, -1, 3), B(-3, 2, 4)$ – кеңістікте берілген нүктелер.

Табу керек: а) $\overrightarrow{AB} = ?$ б) $|\overrightarrow{AB}| = ?$ в) $\overrightarrow{AB}$ векторының $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ векторлары арқылы жіктелімін жаз.

2) $\vec{a}(4, -2, -4), \vec{b}(6, -3, 2)$ векторлары берілген.

Есепте: а) $\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$, б) $np_{\vec{a}}\vec{b} = ?$, $np_{\vec{b}}\vec{a} = ?$, в) $\vec{a}^2 = ?$, $\vec{b}^2 = ?$, г) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = ?$, $(\vec{a} - \vec{b})^2 = ?$,
д) $(2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b}) = ?$

3) $\varphi = \widehat{\vec{a}\vec{b}} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$ берілген.

Есепте: а) $\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$, б) $np_{\vec{a}}\vec{b} = ?$, $np_{\vec{b}}\vec{a} = ?$